CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
Soluzioni degli esercizi della prova scritta del 19 maggio 2004

Studio di funzione:
Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) := \begin{cases} x^2\sqrt{x} - 2/x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ (x^2 + 2x)/x & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti di discontinuità; (c) limiti; (d) asintoti; (e) monotonia; (f) tangenti destra e sinistra in $x = 1$; (g) punti di non derivabilità.

Svolgimento:
Chiamiamo per comodità $f_1(x) = x^2\sqrt{x} - 2/x$ e $f_2(x) = (x^2 + 2x)/x$. Osserviamo che una volta posta la condizione $x \neq 0$, f_2 si semplifica e diventa una funzione lineare ($f_2(x) = x + 2$ se $x \neq 0$). Dunque (dando per scontata la conoscenza del grafico di una funzione lineare) l'esercizio si riduce allo studio di f_1 nell'intervallo $[1, +\infty)$.

(a) f_1 contiene $\sqrt{x}$, che è definita per $x \geq 0$, e $2/x$, definita per $x \neq 0$. Questo non comporta però alcuna restrizione al campo d'esistenza, in quanto f_1 va considerata nell'intervallo $[1, +\infty)$. Invece, come già detto sopra, f_2 ci dà la condizione $x \neq 0$. Dunque $\mathrm{CE} = (-\infty, +\infty) - \{0\}$, e $\mathrm{CE}' = [-\infty, +\infty]$.

(b) Poiché f_1 e f_2 sono funzioni continue nei loro campi di esistenza, f è sicuramente continua in $\mathrm{C} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ (cioè l'unico punto in cui *forse* f non è continua è 1). Eventuali discontinuità vanno allora studiate in $\mathrm{CE} - \mathrm{C} = \{1\}$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f_2(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + 2x)/x = \lim_{x\to 1^-} x + 2 = 3;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f_1(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2\sqrt{x} - 2/x = -1.$$

Poiché i limiti destro e sinistro di f in 1 non coincidono, f non è continua in 1.

(c) Gli unici limiti non banali sono quelli in $\mathrm{CE}' - \mathrm{C} = \{-\infty, 0, 1, +\infty\}$. Poiché in $(-\infty, 1)$ la funzione è nota (come detto, è una retta), e il limite in 1 è già stato svolto, rimane solo quello in $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x} - 2/x = +\infty.$$

(d) Visti i limiti calcolati al punto precedente, deduciamo che:

- non ci sono asintoti verticali;
- non ci sono asintoti orizzontali;
- potrebbe esserci un asintoto obliquo. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2\sqrt{x} - 2/x)/x = \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x} - 2/(x^2) = +\infty$$

ne deduciamo che non ci sono asintoti obliqui verso $+\infty$.

(e) La monotonia è data dal segno della derivata prima. Di nuovo, consideriamo solo f_1. Ricordando che $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ otteniamo

$$f_1'(x) = \frac{5x^{7/2} + 4}{2x^2}.$$

Nell'intervallo $[1, +\infty)$ abbiamo $f_1' > 0$, e dunque f è crescente in tale intervallo.

(f) La tangente sinistra in 1 è la retta stessa. Il coefficiente angolare della tangente destra in 1 è dato dal limite destro di f' in 1, che è:

$$m^+ = \lim_{x\to 1^+} f_1'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{5x^{7/2} + 4}{2x^2} = \frac{9}{2}.$$

La tangente destra passa per il punto $(1, \lim_{x\to 1^+} f(x)) = (1, -1)$ (vedi punto c). Otteniamo:

$$\text{tangente destra: } y + 1 = m^+(x - 1) = \frac{9}{2}(x - 1).$$

(g) Ragionando come in (b), osserviamo che f è sicuramente derivabile in $\mathrm{D} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ($\sqrt{x}$ non è derivabile in 0, ma f_1 va considerata solo in $[1, +\infty)$). Eventuali punti di non derivabilità vanno allora cercati in $\mathrm{CE} - \mathrm{D} = \{1\}$. f non è derivabile in 1: infatti derivabile in $x_0 \Rightarrow$ continua in x_0, mentre f non è continua in 1 (vedi punto b).

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il grafico di f (figura 1), ottenuto per incollamento dei grafici di f_1 (studiato a modo qui sopra) e f_2 (la retta $y = x + 2$ con il punto $(0, 2)$ rimosso).

Notare infine che senza fare la derivata seconda non abbiamo alcuna garanzia sulla concavità di f_1. Un calcolo non esageratamente difficile dà come derivata seconda

$$f_1''(x) = \frac{15x^{7/2} - 16}{4x^3}$$

e dunque un cambio di concavità in $x_0 = (16/15)^{2/7}$.

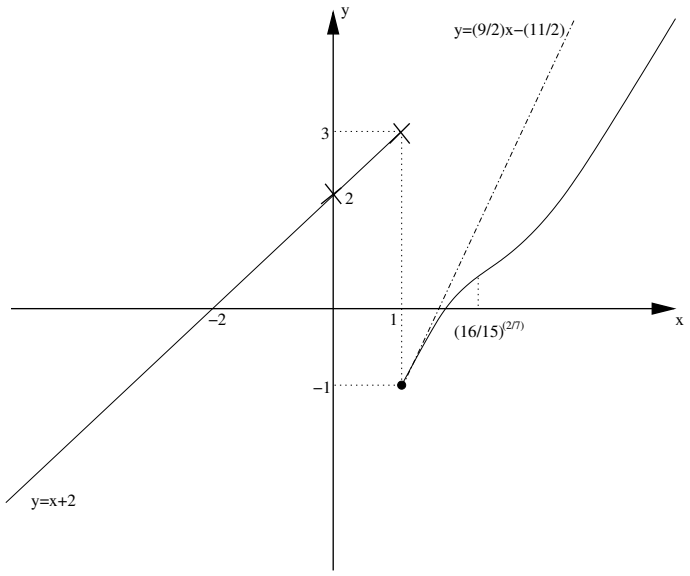

Figura 1: Grafico di f. Notare che fino a 1 il grafico è quello della retta $y = x + 2$ con il punto $(0, 2)$ rimosso.

Studio di grafico di funzione:

Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 2, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 0; (l) punti di non derivabilità.

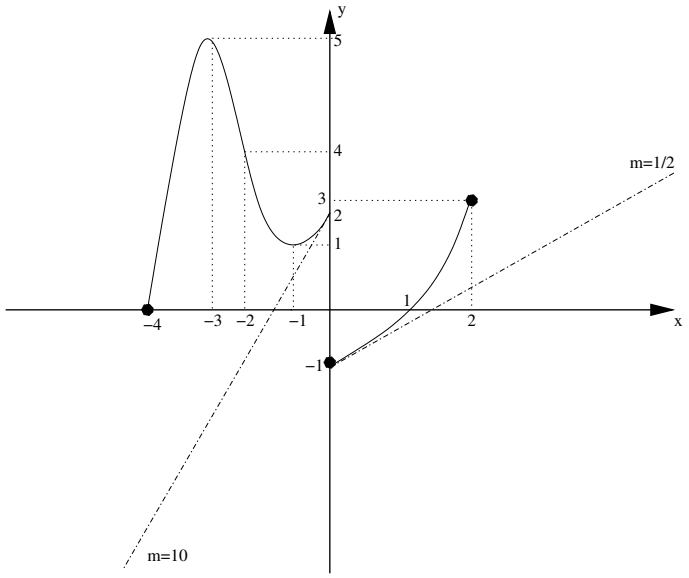

Figura 2: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

Svolgimento:

(a) $\mathrm{CE} = [-4, 2] = \mathrm{CE}'$.

(b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse x, cioé $\{-4, 1\}$.

(c) Intersezioni con l'asse x: $(-4, 0)$, $(1, 0)$. Intersezioni con l'asse y: $(0, -1)$.

(d) Il segno è positivo in $(-4,0) \cup (1,2]$, negativo in $[0,1)$.

(e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, la funzione passa dall'altezza 2 all'altezza -1 nell'ascissa 0, per cui 0 è un punto di discontinuità.

(f) Il grafico di questa funzione è evidentemente quello di una funzione definita a tratti, con incollamento in 0. I limiti non banali sono allora quelli in $(\mathrm{CE}' - \mathrm{CE}) \cup \{0\} = \{0\}$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2;$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1.$$

(g) Non ci sono asintoti.

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero): $(-3,5)$ e $(-1,1)$.

(i) La funzione è monotona crescente in $(-4,-3) \cup (-1,0) \cup (0,2)$, monotona decrescente in $(-3,-1)$.

(j) Massimo globale: $(-3,5)$. Minimo globale: $(0,-1)$. Massimi locali: $(-3,5)$ e $(2,3)$. Minimi locali: $(-4,0)$, $(-1,1)$ e $(0,-1)$.

(k) La tangente sinistra in 0 è $y - 2 = 10x$, la tangente destra in 0 è $y + 1 = x/2$.

(l) f non è continua in 0 , dunque non è ivi neanche derivabile.

Massimi e minimi:
Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(-1,3]$ della seguente funzione:

$$f(x) := x^3 - 1$$

Svolgimento:
Per i minimi e massimi interni all'intervallo, basta osservare che $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$, con prima derivata non nulla $f'''(0) = 6$. Dunque 0 è punto di flesso a tangente orizzontale (cioè né minimo né massimo). Infine, poiché $f'(x) = 3x^2$ è positiva o nulla nell'intervallo $(-1,3]$, f è non decrescente, e quindi 3 è un massimo (globale e locale).

Punti fissi:
Stabilire se $f(x) := x^5 - 4x + 1$ ha punti fissi sul suo campo d'esistenza. In caso affermativo, dire quanti sono tali punti fissi e stimarli tutti con precisione di almeno un'unità.

Svolgimento:
Il problema è equivalente a trovare e stimare gli zeri di $F(x) = x^5 - 5x + 1$. Facciamo uno studio sommario di F sul suo campo d'esistenza $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} F(x) = \pm\infty;$$
$$F'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1).$$

Il segno di F' ci dice che F è crescente in $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ e decrescente in $(-1,1)$. Il grafico di F è dato allora (a meno di derivata seconda, che non ci interessa) dalla figura 3. Dunque esistono esattamente tre zeri x_1, x_2 e x_3 con $x_1 \in (-2,-1)$, $x_2 \in (0,1)$ e $x_3 \in (1,2)$ (abbiamo calcolato $F(-2) = -21$, $F(-1) = 5$, $F(0) = 1$, $F(1) = -3$, $F(2) = 23$). I punti fissi di f sono proprio x_1, x_2 e x_3.

Zeri:
Stabilire se la curva $f(x) := x^3 + x - 1$ ha zeri nell'intervallo $(-1,1)$. In caso affermativo, dire quanti sono e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità.

Svolgimento:
Facciamo uno studio sommario di f. Poiché $f' = 3x^2 + 1$ è positiva, f é crescente. Visto che $f(-1) = -3 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, abbiamo esattamente uno zero x_0 nell'intervallo $(-1,1)$. Infine, osservato che $f(0) = -1 < 0$, ne deduciamo che $x_0 \in (0,1)$.

Teorico:
Scrivere una definizione comprensibile di funzione crescente in un intervallo (a,b). Dimostrare poi che la funzione $f(x) = x^2$ è crescente nell'intervallo $(0,1)$ e non lo è nell'intervallo $(-1,1)$.

Svolgimento:
f si dice crescente in un intervallo (a,b) se comunque presi due valori s, t in (a,b), con $s < t$, si ha $f(s) < f(t)$.
Supponiamo ora di prendere s e t in $(0,1)$, con $s < t$. Da proprietà elementari delle disuguaglianze segue

$$s^2 = s \cdot s < s \cdot t < t \cdot t = t^2$$

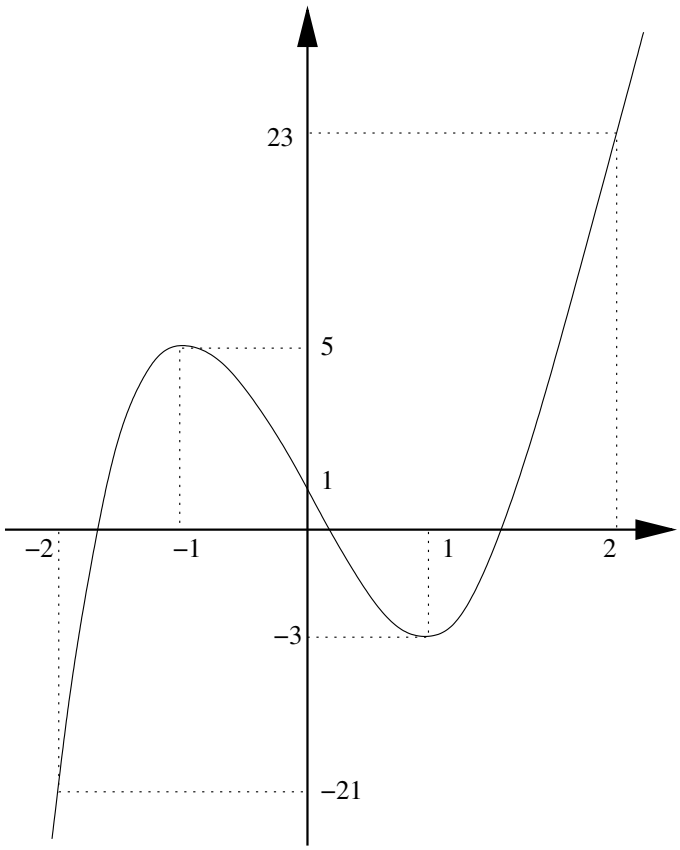

Figura 3: La funzione F ha esattamente tre zeri.

e dunque f è crescente in $(0, 1)$.

Per mostrare invece che f non è crescente nell'intervallo $(-1, 1)$, basta trovare opportuni valori di s e t, con $s < t$, che non soddisfano $f(s) < f(t)$. Per quanto visto sopra, almeno uno dei due dovrà essere negativo. Proviamo con $s = -1/2$ e $t = 0$. Allora $s < t$, ma $f(s) = 1/4 > 0 = f(t)$.